



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

**MATHEMATIQUES II**

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

On désire tester si un algorithme générateur de nombres aléatoires est satisfaisant.

On étudie quelques aspects probabilistes permettant de répondre à cette question.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les notations et les résultats des parties précédentes.

**Notation**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes, on note  $cov(X, Y)$  leur covariance, si celle-ci existe.

**Partie 1**

Soit  $n$  et  $s$  des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs  $C_1, \dots, C_s$ . Les

boules de couleur  $C_i$  sont en proportion  $p_i$ . On a donc  $\sum_{i=1}^s p_i = 1$  et on suppose que, pour tout  $i$ ,  $p_i > 0$ .

On effectue  $n$  tirages successifs d'une boule avec remise.

Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, s\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur  $C_i$  obtenues à l'issue des  $n$

tirages (on remarque que la variable  $X_i$  dépend de  $n$ ). On définit la variable aléatoire  $U_n$  par :  $U_n = \sum_{i=1}^s \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$

**A. Etude des variables  $X_i$ .**

1) Déterminer la loi de  $X_i$ , son espérance et sa variance.

2) Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$  tel que  $i \neq j$ . Déterminer la loi de  $X_i + X_j$  et sa variance.

En déduire que  $cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$ .

**B. On suppose dans cette partie que  $s = 2$ .**

- 1) Montrer que  $U_n = Z_1^2$  où  $Z_1 = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1p_2}}$ . (On utilisera la relation :  $X_1 + X_2 = n$ )
- 2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de  $Z_1$  lorsque  $n$  est grand ?

**C. On suppose dans cette partie que  $s = 3$  et que  $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$  et  $p_3 = \frac{1}{2}$ .**

On pose  $Z_1 = \frac{2}{\sqrt{n}} \left( X_3 - \frac{n}{2} \right)$  et  $Z_2 = \sqrt{\frac{2}{n}} (X_1 - X_2)$ .

- 1) Montrer que  $U_n = Z_1^2 + Z_2^2$ . (On utilisera la relation :  $X_1 + X_2 + X_3 = n$ )
- 2) Déterminer les espérances et variances de  $Z_1$  et  $Z_2$  et  $cov(Z_1, Z_2)$ .
- 3) Par quelle loi peut-on approcher celle de  $Z_1$  lorsque  $n$  est grand?
- 4) Pour  $i$  élément de  $\{1, \dots, n\}$ , on définit la variable  $T_i$  par :  $T_i = 1$  si au  $i$ ème tirage on a obtenu une boule de couleur  $C_1$ ,  $T_i = -1$  si au  $i$ ème tirage on a obtenu une boule de couleur  $C_2$ ,  $T_i = 0$  si au  $i$ ème tirage on a obtenu une boule de couleur  $C_3$ .
  - a) Exprimer  $X_1 - X_2$  à l'aide des variables  $T_i$ .
  - b) En déduire que l'on peut approcher la loi de  $Z_2$ , quand  $n$  est grand, par la loi normale centrée réduite.

5) On suppose avoir défini dans un programme Pascal :

*Type Tableau = Array[1..100] of integer;*

a) Ecrire une procédure *procedure Tirage (var C : Tableau);* permettant de simuler le tirage avec remise de 100 boules dans une urne contenant des boules de couleur  $C_1$  ou  $C_2$  ou  $C_3$  en proportion respectivement  $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ .

L'élément  $C[i]$  vaut 1, 2 ou 3 et représente la couleur de la  $i$ ème boule tirée ( $C_1, C_2$  ou  $C_3$ ). On utilisera la fonction *random : random(4)* retourne un entier aléatoire compris entre 0 et 3.

b) Ecrire une fonction *Difference* de paramètre  $C$  qui retourne la valeur de  $X_1 - X_2$ .

**D. On suppose  $s = 4$  et  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ .**

Soit  $A$  une matrice réelle à  $p$  lignes et  $m$  colonnes dont le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  est noté  $a_{ij}$ . On définit la matrice à  $m$  lignes et  $p$  colonnes appelée transposée de  $A$  et notée  ${}^tA$  dont le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  vaut  $a_{ji}$ . On utilisera sans le démontrer que, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  telles que le produit  $AB$  existe,  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .

- 1) Pour  $i$  élément de  $\{1, 2, 3, 4\}$ , on pose  $Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ .

On note  $M$  la matrice carrée d'ordre 4 dont le coefficient en ligne  $i$  et colonne  $j$  vaut  $cov(Y_i, Y_j)$ . On définit  $N$  la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à  $\frac{1}{4}$ .

Exprimer  $M$  en fonction de  $N$  et de  $I$ , où  $I$  désigne la matrice unité.

- 2) a) On définit 4 vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  :  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0)$ ,  $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)$ ,  $e_4 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ .

Montrer que ces 4 vecteurs sont des vecteurs propres de  $N$  et qu'ils forment une base de  $\mathbb{R}^4$ .

b) Soit  $Q$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  à la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

Montrer que  ${}^tQ Q = I$ .

Expliciter la matrice  ${}^tQ M Q$ .

3) On définit les variables  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  par :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = {}^t Q \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer chaque  $Z_i$  en fonction de  $Y_1, Y_2, Y_3$  et  $Y_4$  et montrer que  $Z_4 = 0$ .

b) Montrer que, pour  $i = 1, 2, 3$ , les variables  $Z_i$  sont centrées.

c) Montrer que  $U_n = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$ . ( On pourra calculer  $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$  )

## Partie 2

1) Soit  $r$  un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ . On note  $J_r$  sa valeur.

2) a) Pour tout réel  $t$  strictement positif, établir la convergence de l'intégrale  $\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ . On note  $G(t)$  sa valeur.

b) Montrer à l'aide d'un changement de variable que, pour tout réel  $t$  strictement positif,  $G(t) = 2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(\sqrt{t}))$  où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

c) En déduire la convergence et la valeur  $J_1$  de  $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$ .

3) Soit  $r$  un entier naturel non nul. On définit la fonction  $f_r$  par :

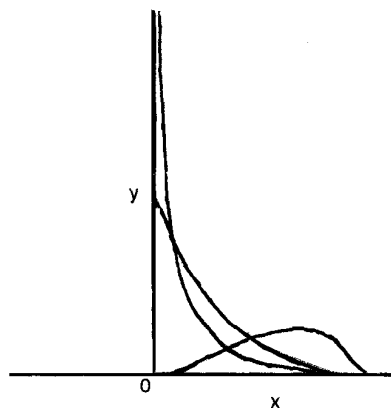
$$\forall x > 0, f_r(x) = \frac{1}{J_r} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \leq 0, f_r(x) = 0.$$

a) Montrer que  $f_r$  est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi du  $\chi^2$  (lire khi-deux) à  $r$  degrés de liberté si et seulement si  $X$  admet  $f_r$  pour densité.

b) Quelle loi reconnaît-on pour  $r = 2$  ?

c) Recopier le graphique ci-dessous en identifiant les courbes représentatives des trois fonctions  $f_1, f_2, f_3$  en justifiant avec précision la réponse.



### Partie 3

On reprend les notations de la partie 1, avec  $s$  entier quelconque supérieur ou égal à 2.

On admet que,  $n$  étant grand, la variable  $U_n$  suit la loi du  $\chi^2$  à  $s-1$  degrés de liberté.

On considère un algorithme générateur de nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 4.

On utilise cet algorithme pour créer un échantillon de 10000 nombres compris entre 1 et 4. On obtient alors :

2602 fois le nombre 1

2534 fois le nombre 2

2422 fois le nombre 3

2442 fois le nombre 4.

On se propose de tester la fiabilité de cet algorithme par l'examen de l'échantillon précédent.

On fait l'hypothèse que le nombre (aléatoire) fourni par le générateur suit une loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $0,95 = F_3(7,81)$  , où  $F_3$  désigne la fonction de répartition de la loi du  $\chi^2$  à 3 degrés de liberté,
- $\frac{1}{2500}(102^2 + 34^2 + 78^2 + 58^2) = 8,4032$  .

En introduisant des variables convenables  $X_1, X_2, X_3, X_4$  et la variable  $U_n$  associée, justifier le rejet de l'hypothèse de répartition uniforme des nombres fournis par le générateur.