

EXERCICE I

Soit $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère l'application S de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'élément $S(M) = JMJ$.

1. **a)** Montrer que l'application S ainsi définie est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est l'automorphisme réciproque de S ?
- b)** Montrer que si M et N sont deux éléments quelconques de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, on a $S(MN) = S(M)S(N)$.
2. On considère les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que (I, J, K, L) forme une base de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que I, J, K, L sont des vecteurs propres de S . Déterminer la matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I, J, K, L) .
4. Soit \mathcal{F} l'ensemble des éléments M de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = M$ et soit \mathcal{G} l'ensemble des éléments M de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $S(M) = -M$. Montrer que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ et que tout élément M de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $M = M_+ + M_-$ avec $M_+ \in \mathcal{F}$ et $M_- \in \mathcal{G}$.

A titre d'exemple, déterminer les matrices A_+ et A_- lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. **a)** Montrer que le produit de deux matrices appartenant à \mathcal{F} appartient aussi à \mathcal{F} . Que peut-on dire du produit de deux éléments de \mathcal{G} ?
- b)** Plus précisément, pour deux matrices M et N de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, exprimer $(MN)_+$ et $(MN)_-$ en fonction de M_+, M_-, N_+ et N_- .

EXERCICE II

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{\ln^k(x)}{x-1} \quad \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \quad \text{et} \quad f_k(1) = 0.$$

1. Etude des fonctions f_k .

a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier la dérivabilité de la fonction f_k sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et préciser la valeur de la dérivée $f'_k(x)$, pour tout x appartenant à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Montrer que f_k est dérivable en 1 et donner, selon les valeurs de k , la valeur de $f'_k(1)$.

b) On considère les fonctions auxiliaires φ_k définies, pour tout $x > 0$, par

$$\varphi_k(x) = k(x-1) - x \ln(x).$$

Etudier, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, les variations de la fonction φ_k . Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une racine unique dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite, on notera a_k cette racine.

c) En distinguant les cas $k = 2$, k pair supérieur ou égal à 4, k impair supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variation de la fonction f_k (on précisera les limites aux bornes).

2. Etude asymptotique de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$.

a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $a_k = e^k(1 + \delta_k)$.

Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation

$$-ke^{-k} = (1 + \delta_k) \ln(1 + \delta_k).$$

Justifier l'inégalité : $|\ln(1 + \delta_k)| \leq ke^{1-k}$. En déduire que la suite $(\delta_k)_{k \geq 2}$ a une limite nulle et, plus précisément, que δ_k est équivalent à $-ke^{-k}$ quand k tend vers l'infini.

c) Justifier, en conclusion, la relation

$$a_k = e^k - k + o(k) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

3. Calcul approché des nombres a_k .

Ecrire un programme en Turbo-Pascal donnant une valeur approchée à moins de 10^{-4} près du nombre a_4 .

EXERCICE III

Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour modéliser ce processus on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p , ($0 < p < 1$). La variable aléatoire X_n prend la valeur 1 si le $n^{\text{ième}}$ objet produit est défectueux et prend la valeur 0 s'il est de bonne qualité.

Pour contrôler la qualité des objets produits, on effectue des prélèvements aléatoires et on considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre p' , ($0 < p' < 1$), telle que Y_n prend la valeur 1 si le $n^{\text{ième}}$ objet produit est contrôlé et 0 s'il ne l'est pas.

Toutes les variables aléatoires X_n et Y_n sont définies sur un même espace probabilisé Ω , muni d'une probabilité notée \mathbf{P} et sont supposées toutes indépendantes entre elles.

La probabilité conditionnelle d'un événement A sachant un événement B est notée $\mathbf{P}_B(A)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $Z_n = X_n Y_n$. La variable aléatoire Z_n ainsi définie vaut donc 1 si le $n^{\text{ième}}$ objet est à la fois défectueux et contrôlé et 0 sinon.

L'objet de l'exercice est d'étudier le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne avant qu'un objet défectueux n'ait été détecté.

1. Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la loi de la variable aléatoire Z_n et la covariance des variables X_n et Z_n . En déduire que les variables X_n et Z_n ne sont pas indépendantes.

Par contre, il résulte des hypothèses (et on ne demande pas de le justifier) que, pour tout entier n , la variable aléatoire Z_n est indépendante des variables $(X_i, i \neq n)$ et des variables $(Y_i, i \neq n)$, de même que des variables $(Z_i, i \neq n)$.

2. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'événement : "le $n^{\text{ième}}$ objet fabriqué est le premier qui ait été contrôlé et trouvé défectueux".

a) Exprimer A_n à l'aide des variables aléatoires Z_1, Z_2, \dots, Z_n et déterminer $\mathbf{P}(A_n)$.

b) Montrer qu'on finira, presque sûrement, par détecter un objet défectueux.

3. Soit un entier $n \geq 2$.

a) Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, calculer la probabilité des événements $(X_k = 1) \cap A_n$ et $(X_k = 1) \cap (Z_k = 0)$.

On note B_k l'événement $(Z_k = 0)$. Montrer l'égalité des probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P}_{A_n}(X_k = 1) = \mathbf{P}_{B_k}(X_k = 1) = \frac{p - pp'}{1 - pp'}.$$

b) Montrer que si x_1, x_2, \dots, x_{n-1} est une suite quelconque de nombres égaux à 0 ou à 1, on a

$$\mathbf{P}_{A_n}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{A_n}(X_i = x_i).$$

c) Soit $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ le nombre d'objets défectueux fabriqués avant le $n^{\text{ième}}$ objet et soit un entier m vérifiant $0 \leq m \leq n-1$. Calculer $\mathbf{P}_{A_n}(S_n = m)$.

d) Déterminer l'espérance de S_n pour la probabilité conditionnelle sachant A_n .
