

## Exercice 1

### Préliminaire

Soit  $(x_n)$  une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel  $n$ , la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

(on donne :  $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} = 0,77$  à  $10^{-2}$  près par excès et  $\frac{1 - \sqrt{13}}{6} = -0,44$  à  $10^{-2}$  près par défaut).

$a$  et  $b$  sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = a \quad u_1 = b \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

### Question 1

- 1 a) - Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et vérifie  $u_n \geq 1$ .
- 1 b) - Montrer que la seule limite possible de la suite  $(u_n)$  est 4.
- 1 c) - Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche la valeur de  $u_n$  pour des valeurs de  $a$  et  $b$  réelles supérieures ou égales à 1 et de  $n$  entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

### Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite  $(u_n)$  par l'étude d'une suite auxiliaire  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ .

- 2 a) - Montrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

- 2 b) - Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$ .

En déduire que  $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$ .

- 2 c) - On note  $(x_n)$  la suite définie par  $x_0 = |v_0|$ ,  $x_1 = |v_1|$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|v_n| \leq x_n$  et conclure quant à la convergence de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 2

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On pose :  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $H = \{ M \in E / \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \alpha I \}$

et pour toute matrice réelle  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\tau(M) = a + d$  et  $\delta(M) = ad - bc$ .

### Question 1

On dit que la suite de matrices  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ , converge vers la matrice O si  $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$  sont des suites réelles de limite nulle.

Justifier les résultats suivants :

1 a) - Soient  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de matrices,  $\lambda$  un réel et M une matrice : si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la matrice O, alors  $(A_n + B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\lambda A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(MA_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(A_n M)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent aussi vers O.

1 b) - Si  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  avec  $|\lambda| < 1$  et  $|\mu| < 1$ , la suite de matrices  $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers O.

1 c) - Si une matrice A est diagonalisable, de valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  avec  $|\lambda| < 1$  et  $|\mu| < 1$ , alors la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice O.

### Question 2

Dans toute cette question, A désigne un élément de E tel que  $\delta(A) < 0$ .

On se propose de montrer qu'une telle matrice est diagonalisable.

2 a) - Montrer que A n'est pas un élément de H.

2 b) - Vérifier par le calcul que pour tout élément M de E, on a :

$$M^2 = \tau(M) M - \delta(M) I \quad (*)$$

2 c) - Montrer qu'il existe deux réels distincts  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :  $\lambda + \mu = \tau(A)$  et  $\lambda \mu = \delta(A)$ .

2 d) - On pose  $M = A - \lambda I$  et  $N = A - \mu I$ .

Montrer que  $MN = O$  et en déduire que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.

Montrer de même que N n'est pas inversible.

2 e) - En déduire que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P de E inversible telle que  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

### Question 3

On note U l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $U = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ \times ]0, 1[$  et f l'application définie sur U par :  $(x,y) \rightarrow f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$ .

3 a) - Montrer que f est strictement négative sur U.

3 b) - Montrer (en rédigeant soigneusement) que f admet un unique extremum sur U et que celui-ci est un minimum dont on donnera la valeur.

En déduire que pour tout élément (x, y) de U :  $-\frac{25}{64} \leq f(x,y) < 0$ .

### Question 4

Soient a et b deux réels tels que (a, b) soit un élément de l'ouvert U défini précédemment.

$$\text{On pose } Q = \begin{pmatrix} a & b \\ a(1-b) & a-1 \end{pmatrix}$$

On se propose de montrer que la suite de matrices  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers O.

4 a) - Calculer  $\tau(Q)$  et  $\delta(Q)$ .

Vérifier que les résultats de la question 2 s'appliquent pour  $A = Q$  et en déduire que Q admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que :

$$-\frac{1}{3} < \lambda + \mu < \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{25}{64} \leq \lambda\mu \leq 0.$$

4 b) - Exprimer  $\lambda^2 + \mu^2$  en fonction de  $\lambda + \mu$  et  $\lambda\mu$  et en déduire que  $\lambda^2 + \mu^2 < 1$ .

Pourquoi peut-on affirmer que la suite  $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers O ?

### Exercice 3

On modélise la durée de fonctionnement d'un appareil par une variable aléatoire réelle  $T$  définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , admettant une densité  $f$ .

On note  $F$  sa fonction de répartition et on suppose que  $F$  vérifie les propriétés :

- $F(t) = 0$  pour tout réel  $t \leq 0$
- $F$  est de classe  $C^1$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Sous une hypothèse introduite dans la question 2, on se propose d'expliciter  $F$  et  $f$ , puis de calculer l'espérance  $E(T)$  de  $T$ , "temps moyen de fonctionnement".

#### Question 1

On rappelle que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$  converge et vaut  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif ; si  $x$  est un élément de  $\mathbb{R}^+$ , on pose :

$$I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt.$$

1 a) - A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ ,  $J(x)$  en fonction de  $I(\frac{x}{\alpha})$ .

1 b) - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}^+$  :

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du - x e^{-x^2}.$$

1 c) - En déduire que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(t/\alpha)^2} dt$  converge et vaut  $\frac{\alpha^3 \sqrt{\pi}}{4}$ .

#### Question 2

2 a) - Montrer que, pour tout élément  $u$  de  $\mathbb{R}^+$ ,  $F(u) < 1$ , puis en déduire que  $P(T \geq u) \neq 0$ .

2 b) - Soient  $t_0$  et  $t$  des réels tels que  $0 \leq t_0 < t$ .

On pose :  $q(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} P(t_0 \leq T \leq t \mid T \geq t_0)$  (probabilité conditionnelle).

$q(t_0, t)$  est le *taux d'arrêt de fonctionnement* entre les instants  $t_0$  et  $t$ .

On définit ensuite, sous réserve d'existence, le *taux d'arrêt de fonctionnement instantané* en  $t_0$  par :  $\tau(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} q(t_0, t)$ .

Exprimer  $q(t_0, t)$  en fonction de  $t$ ,  $t_0$ ,  $F(t_0)$  et  $F(t)$ .

En déduire que  $\tau(t_0)$  existe et que  $\tau(t_0) = \frac{F'(t_0)}{1 - F(t_0)}$

Dans la suite de l'énoncé, on fait l'hypothèse suivante :

il existe un réel  $c > 0$  tel que, pour tout élément  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ ,  $\tau(t) = ct$ .

2 c) - Montrer que, pour tout élément  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ , on a :  $-\ln[1 - F(t)] = c \frac{t^2}{2}$ .

2 d) - Soit  $t$  un élément de  $\mathbb{R}^+$ .

Expliciter  $F(t)$ , puis montrer, en posant  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{c}}$ , que  $f(t) = \frac{2}{\alpha^2} t e^{-(t/\alpha)^2}$ .

2 e) - Montrer enfin que  $E(T)$  existe et donner sa valeur en fonction de  $c$ .